

11. Segmentierung

11. Segmentierung

Ziel:

- Zerlegung eines Bildes $g(\mathbf{x})$ in getrennte bedeutungsvolle Bereiche

Definition: Vollständige Segmentierung

- Unterteilung der Menge Ω_g aller Bildpunkte von $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_g$, in I disjunkte, nichtleere Teilmengen $\omega_1, \dots, \omega_I$ so, dass mit einem gewissen Einheitlichkeitskriterium \mathcal{E} gilt:
 - $\bigcup_{i=1}^I \omega_i = \Omega_g$
 - $\forall i: \omega_i$ ist zusammenhängend
 - $\forall i: \mathcal{E}(\omega_i)$ ist erfüllt
 - für jede Vereinigungsmenge benachbarter ω_i, ω_j ist $\mathcal{E}(\omega_i \cup \omega_j)$ nicht erfüllt

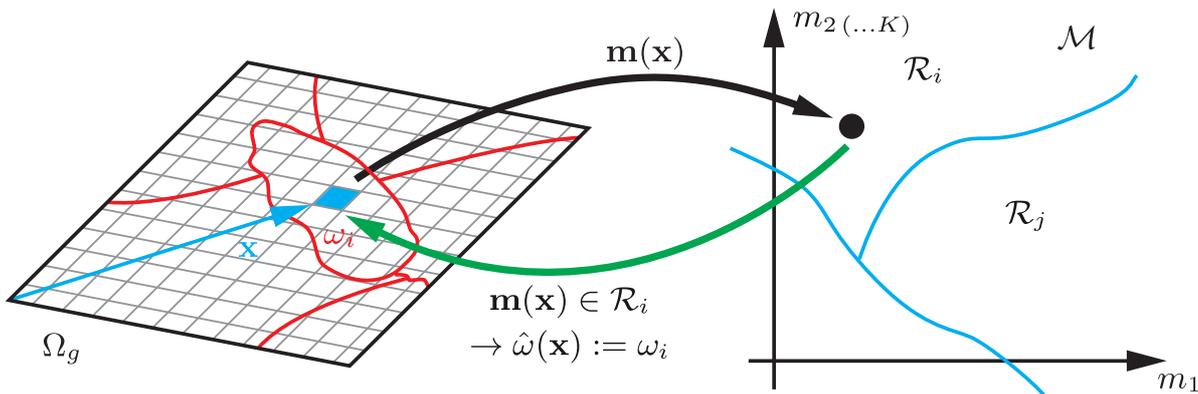
- Man unterscheidet zwischen **bereichsorientierten** und **kantenorientierten** Verfahren

11.1.1 Segmentierung durch merkmalsbasierte Klassifikation

- Jedem Pixel \mathbf{x} wird ein Merkmalsvektor $\mathbf{m}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^K$ zugeordnet
- Merkmalsraum \mathcal{M} wird (z. B. mittels Ballungsanalyse) in I disjunkte Entscheidungsgebiete \mathcal{R}_i partitioniert

$$\bigcup_{i=1}^I \mathcal{R}_i = \mathcal{M}, \quad \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

- **Segmentierung:** $\mathbf{m}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_i \rightarrow \mathbf{x}$ wird ω_i zugewiesen



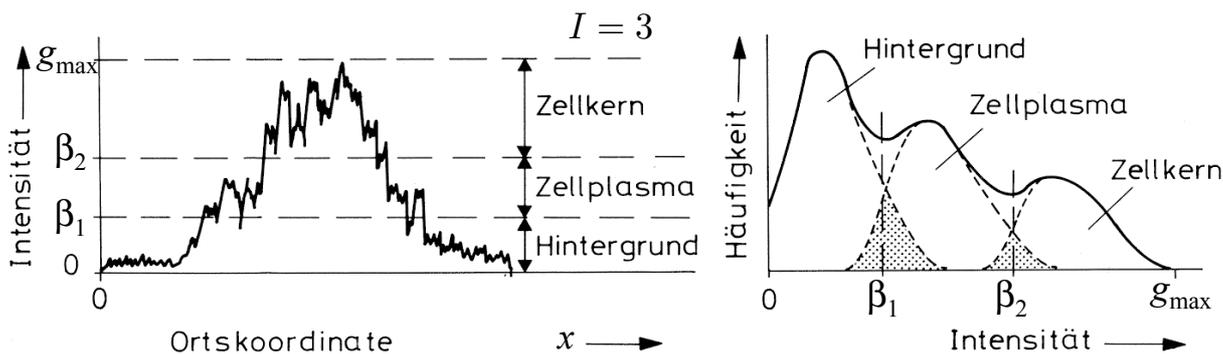
11.1 Bereichsorientierte Segmentierung

Beispiel 11.1: Bildwert als Merkmal

- Einfachster Merkmalsraum: Bildwert als Merkmal verwendet:

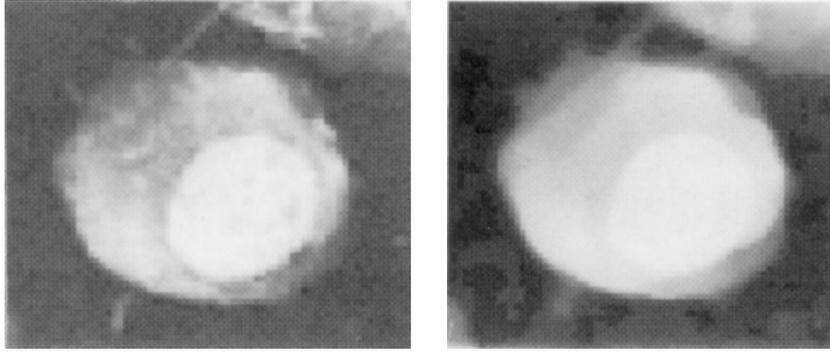
$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad K = 1$$

- Segmentierung erfolgt durch Festlegung von Entscheidungsgebieten (z. B. Intervalle von Grauwerten) und deren Grenzen
- Die so erzeugten Segmente ω_i müssen nicht zusammenhängen!



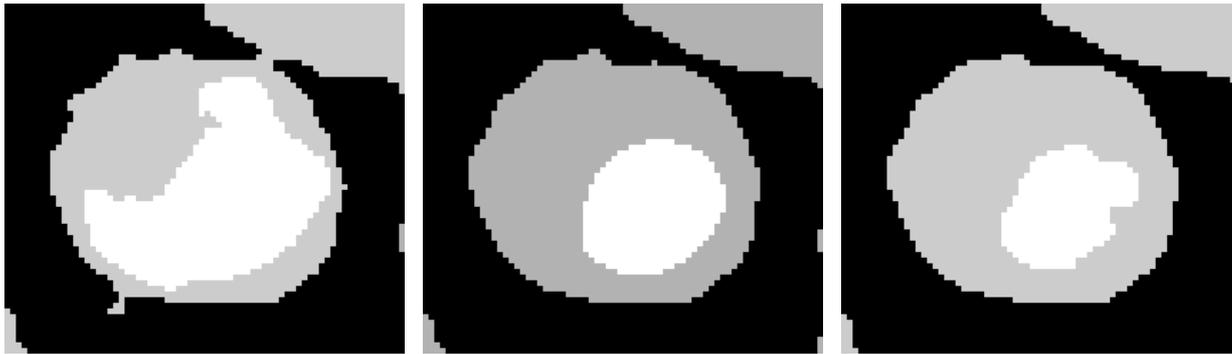
Quelle: F. M. Wahl, Digitale Bildsignalverarbeitung, 1989

Quelle: Wahl, 1989



Zellbild (Original)

Medianfilterung



Schwellen zu niedrig

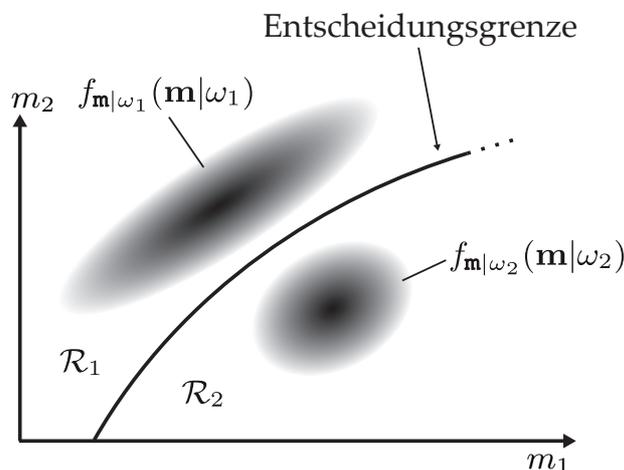
Segmentierungsergebnis

Schwellen zu hoch

Beispiel 11.3: Lokaler Mittelwert und Standardabweichung

- Statistiken über die lokale Bildwertverteilung als Merkmale geeignet, z. B.:

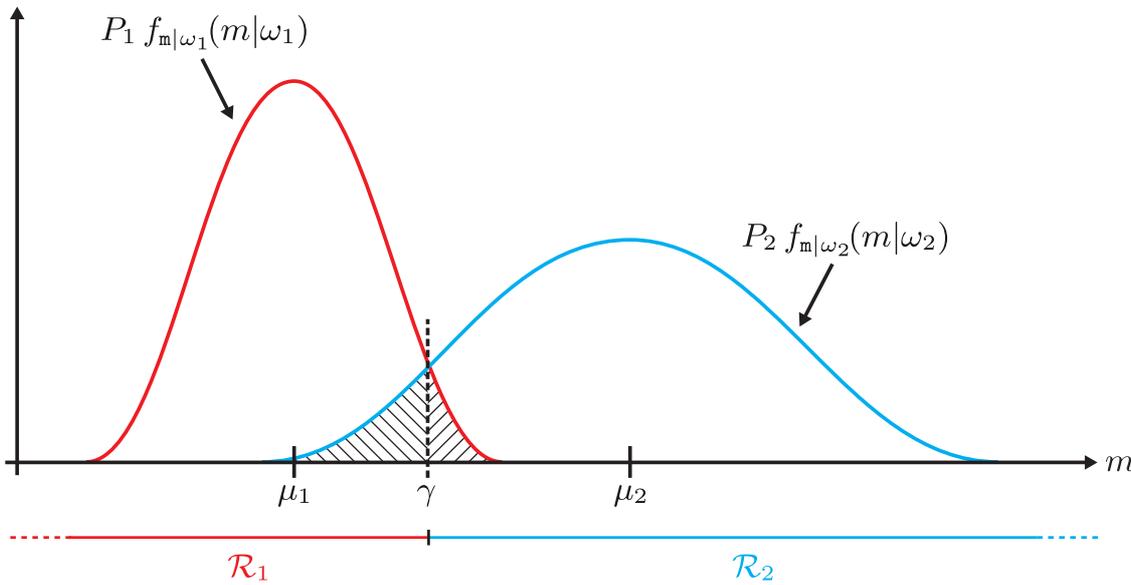
$$K = 2, \quad \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \hat{\mu}(\mathbf{x}) \\ \hat{\sigma}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad I = 2$$



- Klassen mit m_1 oder m_2 alleine nicht trennbar!

Beispiel: Optimale Entscheidungsgrenze, $K = 1, I = 2$

- Für beide Klassen werden oft Gauß-Dichten mit individuellen Parametern μ_i und σ_i angesetzt



- Entscheidungsgrenze degeneriert zu einem Schwellwert γ

Modell:

- $\mathbf{x} \in \omega_i \Rightarrow m(\mathbf{x}) = m$ mit WDF:
$$f_{m|\omega_i}(m|\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2}$$

Dichte des Merkmals m für den Fall, dass \mathbf{x} zur Klasse ω_i gehört

$P_i := \Pr\{\mathbf{x} \in \omega_i\}$ $i = 1, 2$ Wahrscheinlichkeit, dass ein \mathbf{x} zu ω_i gehört

- Segmentierungsfehler** (Fehlerwahrscheinlichkeit):

$$\varepsilon(\gamma) = P_1 \int_{\gamma}^{\infty} f_{m|\omega_1}(m|\omega_1) dm + P_2 \int_{-\infty}^{\gamma} f_{m|\omega_2}(m|\omega_2) dm \rightarrow \text{Min.}$$

$$\rightarrow \gamma_{\text{opt}}(\mu_1, \sigma_1, P_1, \mu_2, \sigma_2, P_2)$$

- für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

- μ_i, σ_i, P_i aus Histogramm $\hat{h}(m)$ schätzen durch:

$$\sum_m (f(m) - \hat{h}(m))^2 \rightarrow \text{Min.}$$

Anpassung der Modelldichte $f(m)$ an das (empirische) Histogramm $\hat{h}(m)$ mit der Methode der kleinsten Quadrate

$$f(m) = f_m(m|\mu_1, \sigma_1, P_1, \mu_2, \sigma_2, P_2) = f_{m|\omega_1}(m) \cdot P_1 + f_{m|\omega_2}(m) \cdot P_2$$

Problem:

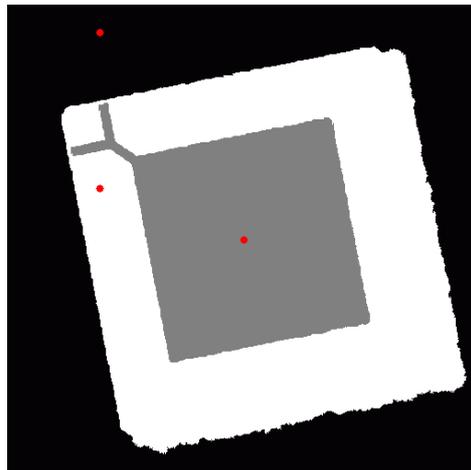
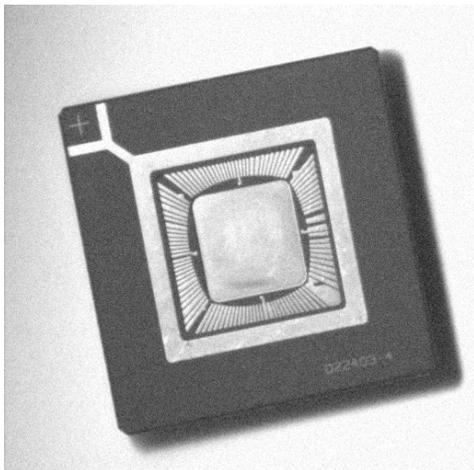
- Schwellwertverfahren liefern i. Allg. keine zusammenhängenden Gebiete

Andere Verfahren:

- **Bereichswachstumsverfahren:** Initialpunkte. Wachstum durch iteratives Hinzufügen von Nachbarpunkten, die mit dem Einheitlichkeitskriterium \mathcal{E} konform sind, bis alle Pixel $x \in \Omega_g$ einer Klasse ω_i zugewiesen sind.
- **Pyramid Linking** [BPF12, Kap. 15]

Beispiel: Bereichswachstumsverfahren

- Iterative Vergrößerung von Segmenten, die Einheitlichkeitskriterium \mathcal{E} erfüllen
- Liefert zusammenhängende Segmente
- Vorgegebene Initialpunkte („Saatpunkte“, rot markiert)
- Nachteil: Abhängigkeit von der Wahl der Initialpunkte



Kantendetektion:

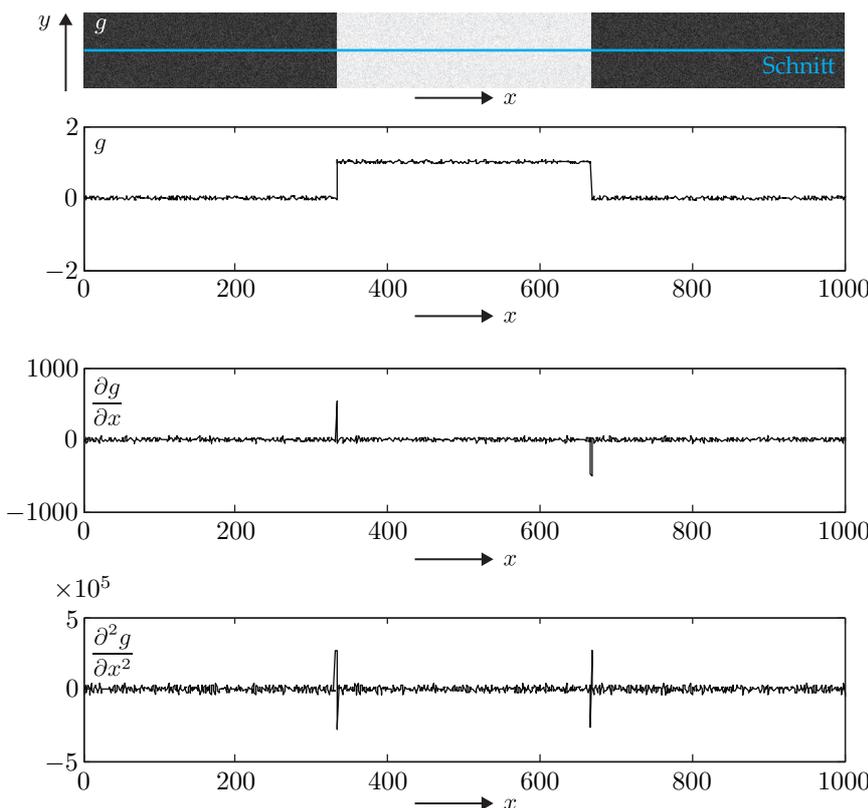
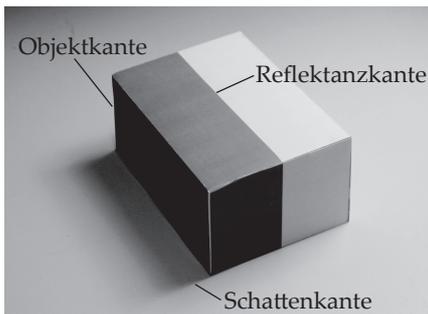
- Findung der Grenzen zwischen bedeutungsvollen Bildbereichen

Definition: Kante

- Grenze zwischen zwei Gebieten, die in sich bezüglich eines Einheitlichkeitskriteriums homogen sind (auch **Stufenkante** genannt)

Einteilung von Kanten

- Objektkanten (Objektgeometrie)
- Reflektanzkanten
- Schattenkanten } Scheinkanten, da keine geometrische Entsprechung



Extrema der 1. Ableitung (Gradient)

Nulldurchgänge der 2. Ableitung

Gesucht:

- lineare diskrete Filter zur Approximation von

$$\text{grad } g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x}, \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial y} \right)^T$$

$\|\text{grad } g(\mathbf{x})\|$: Maß für „Kantenstärke“

$\text{grad } g(\mathbf{x}) \perp$ Kante, d. h.

$\angle \text{grad } g(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial y}}{\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x}}\right)$: Normalenrichtung der Kante

wenn am Ort \mathbf{x} eine Kante vorliegt

Diskrete Näherungen (eindimensional):

$$\left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=m\Delta x} \approx d_m * g_m$$

Approximationen:

- Unsymmetrischer Differenzenquotient:

$$\frac{g(x) - g(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

- Symmetrischer Differenzenquotient:

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

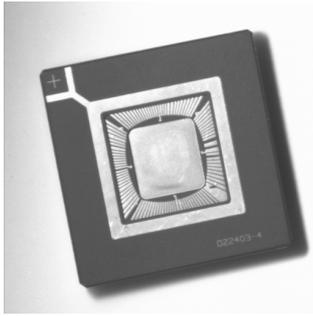
- Stirling'sche Approximation:

$$\frac{-g(x+2\Delta x) + 8g(x+\Delta x) - 8g(x-\Delta x) + g(x-2\Delta x)}{12\Delta x}$$

Impulsantwort d_m

| m | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|-----|----|-----------------|---------------|---|----------------|----------------|---|-----|
| ... | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | ... |
| ... | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | ... |
| ... | 0 | $-\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 | ... |

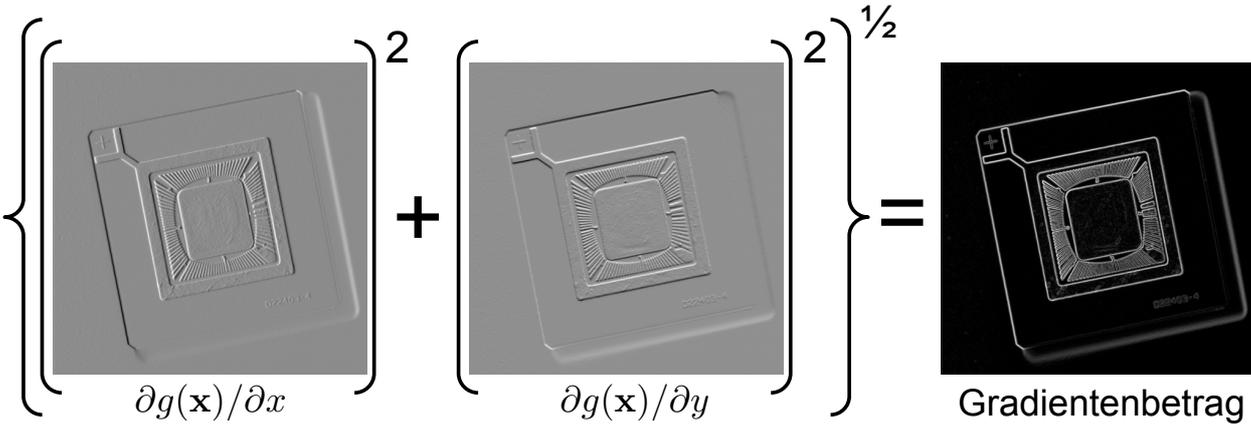
Beispiel zur Kantendetektion mit Gradientenoperatoren:



Symmetrischer Differenzenquotient ($\Delta x = \Delta y$)

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x} \approx \frac{g(x + \Delta x, y) - g(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial y} \approx \frac{g(x, y + \Delta y) - g(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$



Übertragungsfunktion eines Differenzierers

■ Ideal:

$$\frac{d}{dx} g(x) \quad \circ \bullet \quad \underbrace{j2\pi f}_{\text{ÜF}} \cdot G(f)$$

■ Symmetrischer Differenzenquotient:

$$D_k = \frac{1}{2} \left(-e^{-j2\pi \frac{k}{N}} + e^{-j2\pi \frac{k(N-1)}{N}} \right) = \frac{1}{2} \left(-e^{-j2\pi \frac{k}{N}} + e^{j2\pi \frac{k}{N}} \right)$$

$$= j \cdot \sin \left(2\pi \frac{k}{N} \right)$$

$$\underset{k \ll N}{\approx} j \cdot 2\pi \frac{k}{N} \qquad \frac{k}{N} \hat{=} \text{diskrete Frequenz}$$

$$D_0 = 0, \quad D_{\frac{N}{4}} = j, \quad D_{\frac{N}{2}} = 0$$

Abfall für höhere Frequenzen

Konstruktion symmetrischer Ableitungsfilter der Länge $L = 2r + 1$

■ Ansatz:
$$r d_m = \begin{cases} 0 & \text{für } m = 0 \quad \vee \quad |m| > r \\ r d_m = -r d_{-m} & : \text{ reelle, ungerade Ortsfunktion} \end{cases}$$

korrespondiert mit rein imaginärer, ungerader Fourier-Transformierten

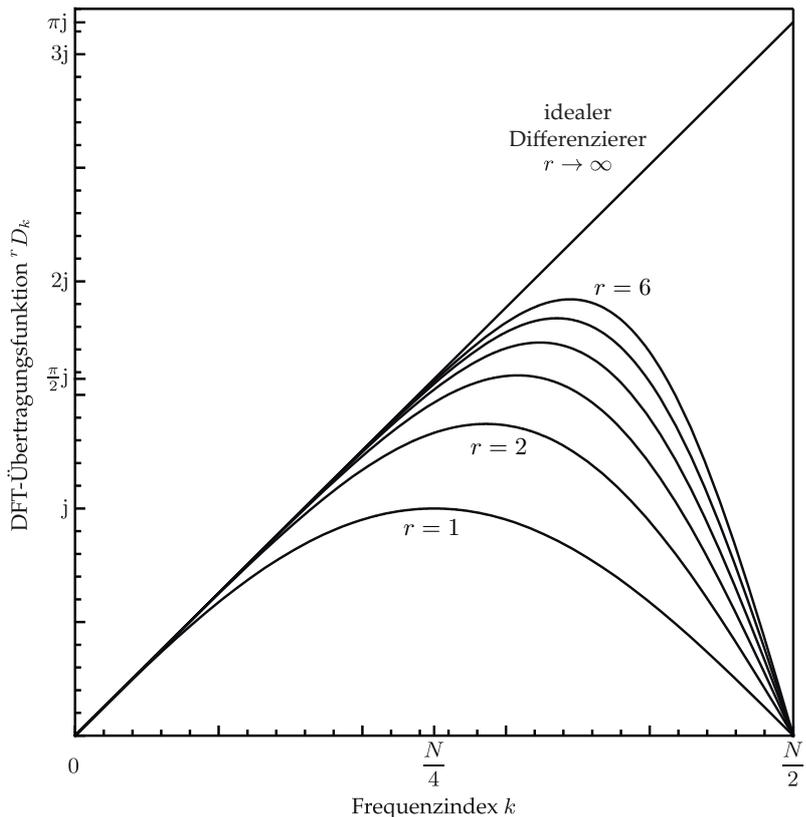
■ DFT:
$$r D_k = \sum_{\nu=0}^{N-1} r d_\nu e^{-j2\pi \frac{k\nu}{N}} = \sum_{\nu=1}^r r d_\nu \left(e^{-j2\pi \frac{k\nu}{N}} - e^{j2\pi \frac{k\nu}{N}} \right), \quad r < \frac{N}{2}$$

$$= -2j \cdot \sum_{\nu=1}^r r d_\nu \sin\left(2\pi \frac{k\nu}{N}\right)$$

Taylor-Entwicklung in Abhängigkeit von k/N

- $\{r d_\nu\}$ so wählen, dass:
- lineares Glied $\stackrel{!}{=} j2\pi k/N$
 - $r-1$ folgende Glieder $\stackrel{!}{=} 0$

Übertragungsfunktionen symmetrischer linearer Ableitungsfilter der Länge $L = 2r + 1$



Differentiation mittels der DFT (eindimensional)

$$\frac{dg(x)}{dx} \approx \text{DFT}^{-1}\{G_k \cdot D_k\}$$

$$D_k := \begin{cases} j 2\pi \frac{k}{N} & \text{für } k < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{für } k = \frac{N}{2} \\ j 2\pi \left(\frac{k-N}{N}\right) & \text{für } k > \frac{N}{2} \end{cases} \quad k = 0, \dots, N-1$$

problematisch bei stark ausgeprägtem Leckeffekt

Probleme der Gradientenfilter:

- Differentiation verstärkt Rauschen!

→ Lösung: Unterdrückung hoher Ortsfrequenzen durch TP-Filterung

→ Brauchbare lineare Kantendetektionsfilter haben BP-Charakter

- Filterergebnis zeigt breite Konturen
- unterbrochene Konturen
- falsche Konturen, Artefakte

Nachbearbeitung nötig:

- Kantendünnung
- Kantenerfolgung
- Unterdrückung falscher Kanten

11.2.1.3 Differenzierter Gauß-Tiefpass

Differenzierter Gauß-TP

- gebräuchliche, **störungsunempfindliche** Gradientenapproximation zur Kantendetektion

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x} (h(\mathbf{x}) ** g(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) h(\mathbf{x} - \alpha) d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) \underbrace{\frac{\partial h(\mathbf{x} - \alpha)}{\partial x}}_{d^x(\mathbf{x})} d\alpha = \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x} \right) ** g(\mathbf{x})$$

$$h(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{grad } g(\mathbf{x}) \approx (\text{grad } h(\mathbf{x})) ** g(\mathbf{x})$$

$$\text{grad } h(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\sigma^2} h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} d^x(\mathbf{x}) \\ d^y(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

■ Übertragungsfunktion:

$$d^x(\mathbf{x}) = -\frac{x}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}} = -j2\pi x \frac{-j}{4\pi^2\sigma^4} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}}$$

⌋

$$D^x(\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial f_x} \left(\frac{-j}{2\sigma^2\pi} e^{-2\pi^2\sigma^2\|\mathbf{f}\|^2} \right)$$

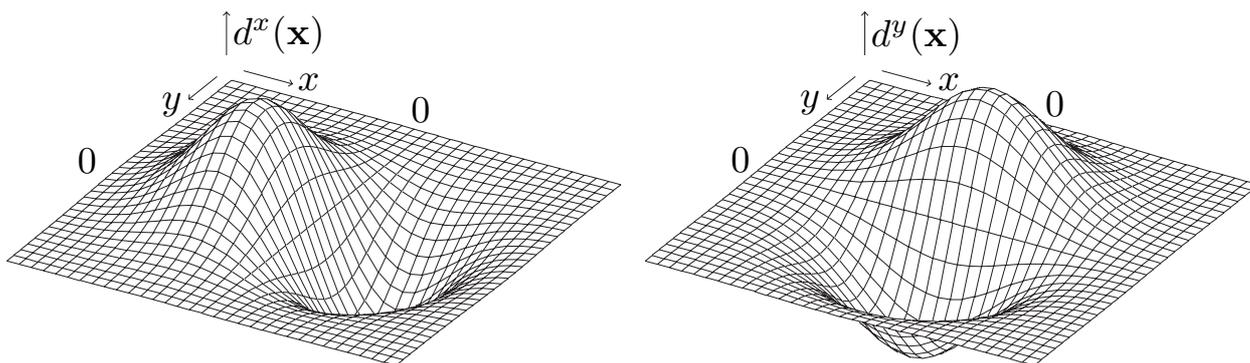
$$D^x(\mathbf{f}) = j2\pi f_x e^{-2\pi^2\sigma^2\|\mathbf{f}\|^2} \approx j2\pi f_x$$

↑
kleine $\|\mathbf{f}\|$

Diskrete Approximation:

- Abtastung von $d^x(\mathbf{x})$ und $d^y(\mathbf{x})$ im Ortsbereich $\rightarrow d_{mn}^x, d_{mn}^y$
- Abtastung von $D^x(\mathbf{f})$ und $D^y(\mathbf{f})$ im Ortsfrequenzbereich $\rightarrow D_{kl}^x, D_{kl}^y$

Impulsantworten des differenzierten Gauß-Tiefpasses



11.2.1.4 Einfache Kantenoperatoren

Sobel-Operator

- gebräuchlicher Kantendetektor
- **Sobel-Filter** approximieren grob die differenzierten Gauß-Tiefpässe:

$$s_{mn}^x : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$s_{mn}^y : \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sobel-Operator:

$$\left(|s_{mn}^x ** g_{mn}|^q + |s_{mn}^y ** g_{mn}|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

literaturüblich:
 $q = 1, 2, \infty$

Mit dieser q -Norm lassen sich für Kantendetektionszwecke auch die Komponenten anderweitig berechneter Gradientenapproximationen verarbeiten

$s_{mn}^x =$

| |
|---|
| 1 |
| 2 |
| 1 |

**

| | | |
|---|---|----|
| 1 | 0 | -1 |
|---|---|----|

DFT



Binomial-TP
bzgl. y

Symm. Differenzen-
quotient bzgl. x

$$S_{kl}^x = 2 \underbrace{\left(1 + \cos\left(2\pi \frac{l}{N} \right) \right)}_{\text{TP}} \cdot j \sin\left(2\pi \frac{k}{N} \right) \quad \text{für eine } N \times N\text{-DFT}$$

Roberts-Operator

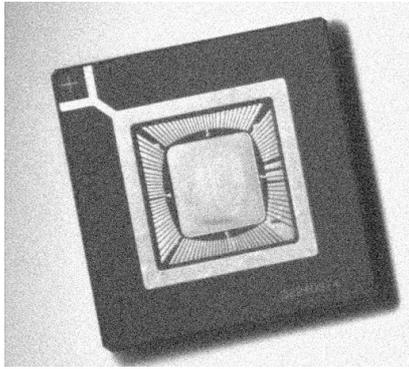
- nutzt die kleinstmöglichen Filtermasken (Größe 2×2) zur Kantendetektion

$$k_{mn} = \left(|g_{m,n} - g_{m-1,n-1}|^q + |g_{m-1,n} - g_{m,n-1}|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

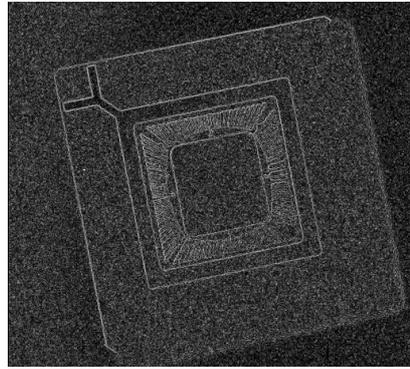
Eigenschaften:

- im Vergleich zum Sobel-Operator viel rauschempfindlicher
- dünnere Kanten als Sobel
- unsymmetrisch \rightarrow Verschiebung der Kanten

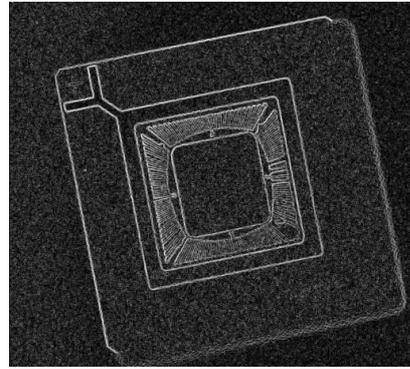
11.2.1 Gradientenfilter



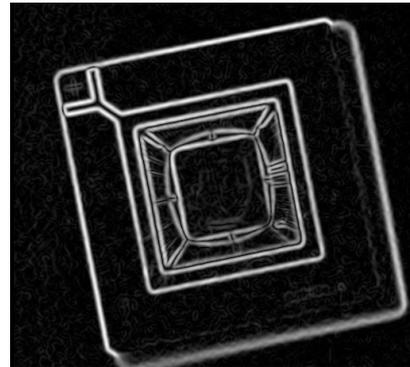
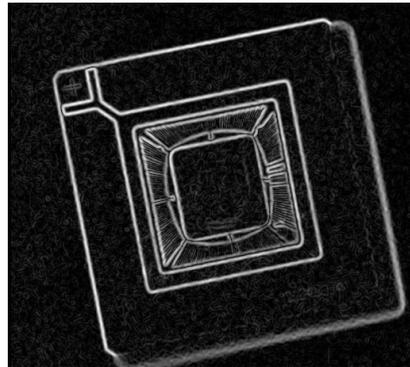
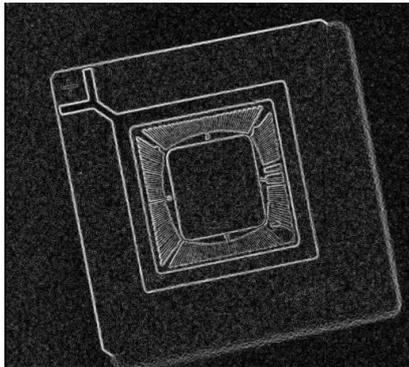
Original



Roberts-Operator

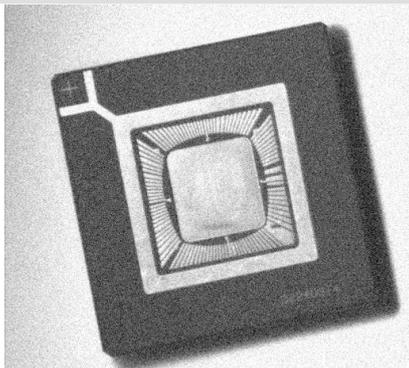


Sobel-Operator

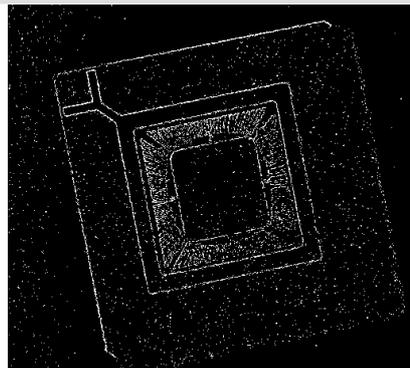


Differenzierter Gauß-Tiefpass: $L = 5$ ($\sigma = 0,8$), $L = 9$ ($\sigma = 1,5$), $L = 13$ ($\sigma = 2,2$)

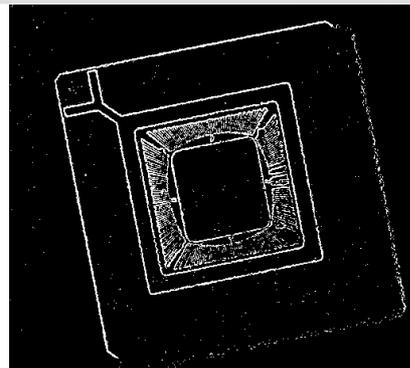
11.2.1 Gradientenfilter



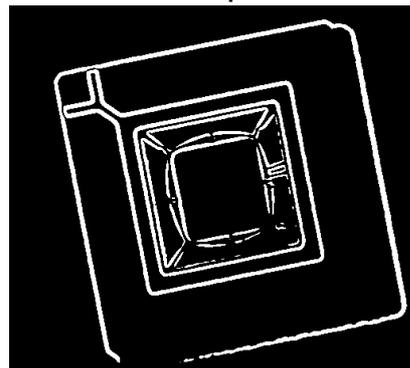
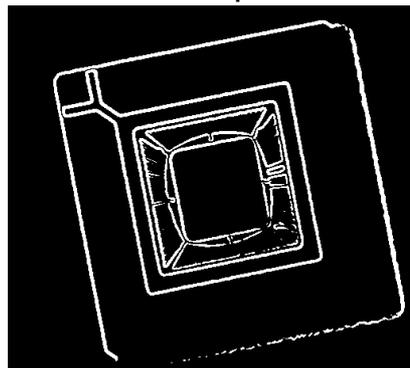
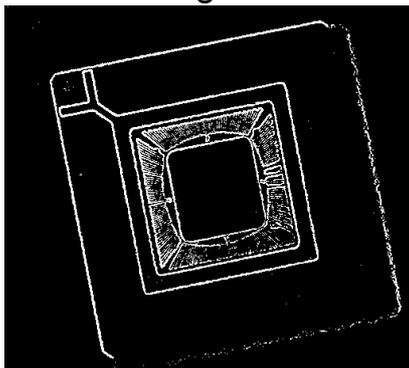
Original



Roberts-Operator

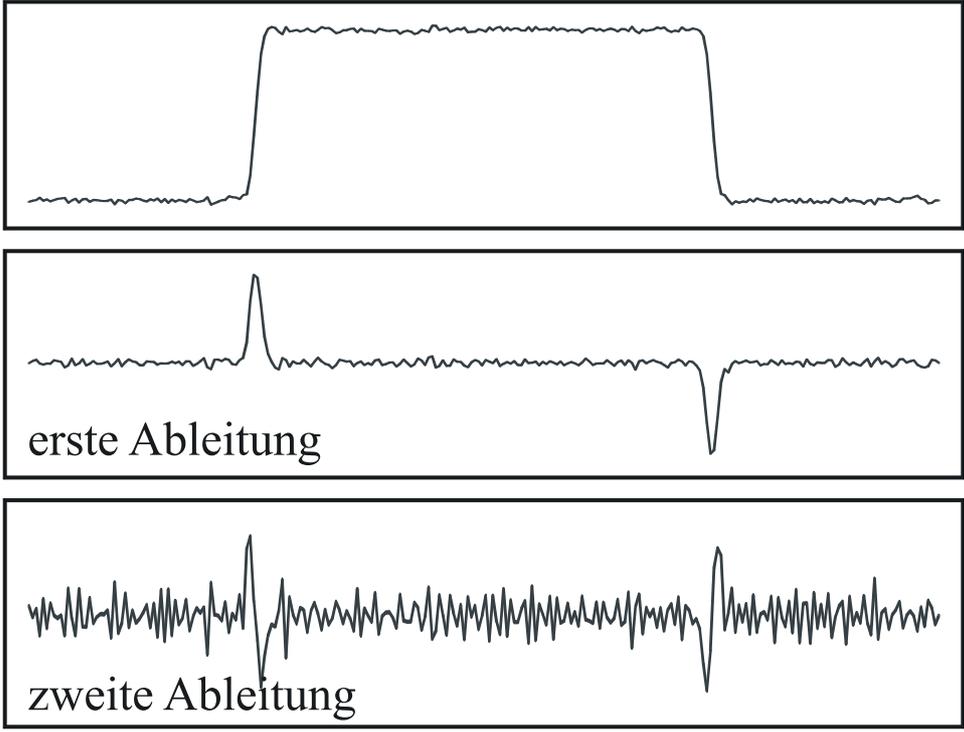


Sobel-Operator



Differenzierter Gauß-Tiefpass: $L = 5$ ($\sigma = 0,8$), $L = 9$ ($\sigma = 1,5$), $L = 13$ ($\sigma = 2,2$)

Zweifache Differentiation sehr störanfällig!



Laplacian-of-Gaussian-Operator (LoG) (Marr & Hildreth 1980)

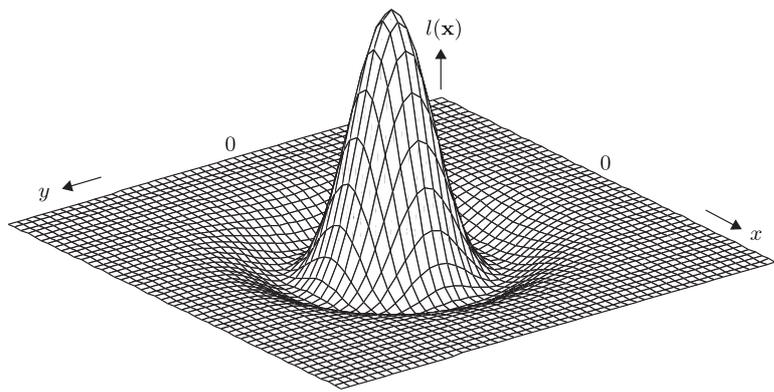
$$-\Delta(h(\mathbf{x}) ** g(\mathbf{x})) = \underbrace{(\Delta h(\mathbf{x}))}_{=: l(\mathbf{x})} ** g(\mathbf{x})$$

Gauß-TP zur Störungsunterdrückung

$$l(\mathbf{x}) = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

$$= \frac{2\sigma^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mathbf{f}) = 4\pi^2 \|\mathbf{f}\|^2 e^{-2\pi^2 \sigma^2 \|\mathbf{f}\|^2}$$



$L(0) = 0, L(\infty) = 0$: BP-Charakter

„Mexikanerhut“

Diskrete Realisierungsmöglichkeiten:

- Abtastung von $l(\mathbf{x}) \rightarrow l_{mn}$ Maske großzügig wählen: Kantenlänge $> 7\sigma$ (kleinste von Marr/Hildreth verwendete Maske war: $\sigma = 5 \Delta x \rightarrow$ Kantenlänge $35 \Delta x$)
- Abtastung von $L(\mathbf{f}) \rightarrow L_{kl}$
- Approximation durch **Difference-of-Gaussians-Filter** (DoG)

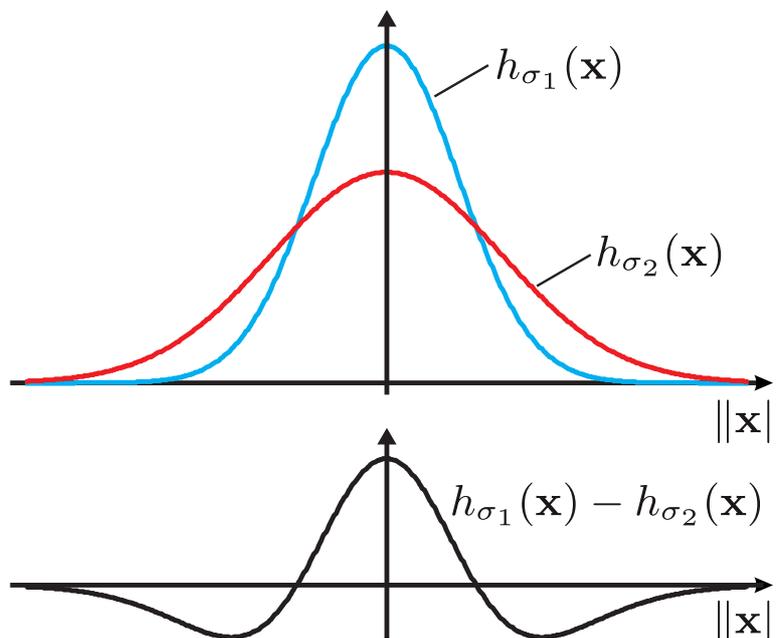
$$l(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_1^2}} - \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_2^2}} \quad \text{mit} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \approx 1,6$$

durch Binomialfilter realisieren!

Betragsmaximum der DoG-Übertragungsfunktion:

$$\|f\|_{\max} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}$$

Difference of Gaussians

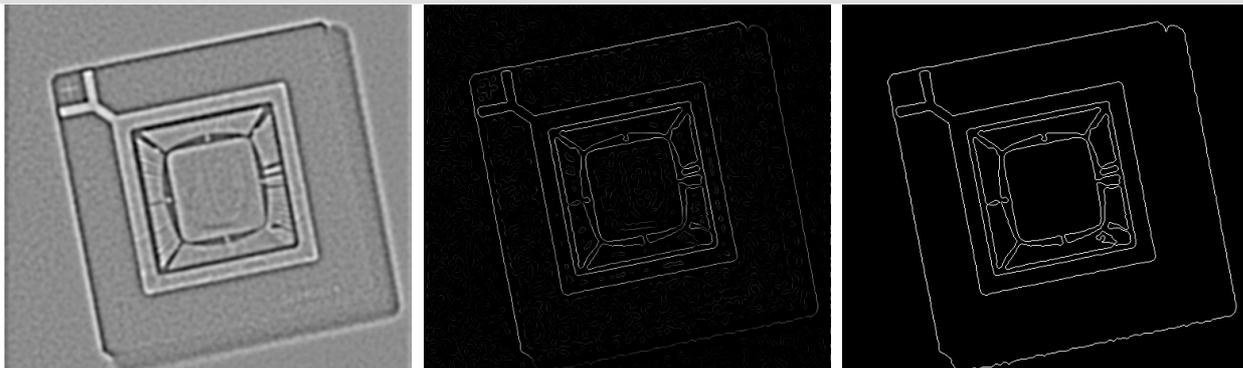


Vorteile:

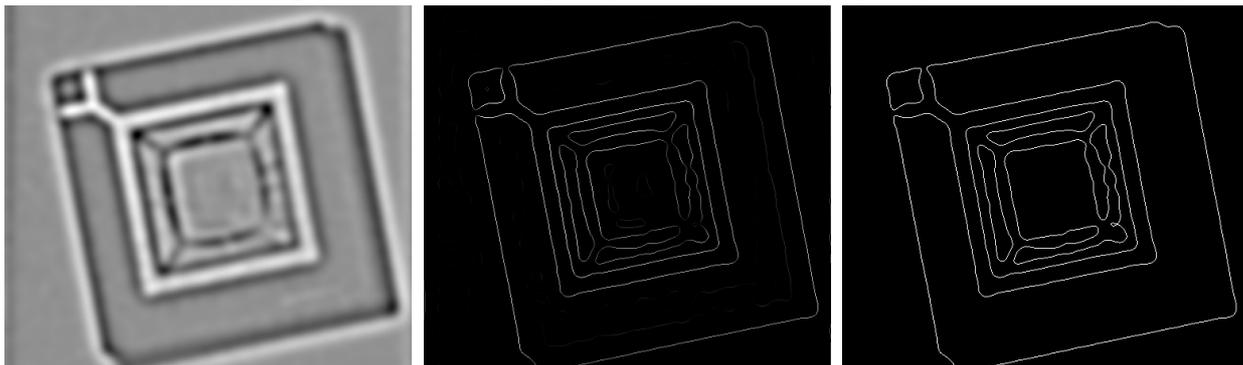
- 1 Pixel breite Kanten
→ keine Kantenverdünnung notwendig
- angelehnt an menschliches visuelles System
(an dessen Datenverarbeitung zur Kantenextraktion)

Nachteile:

- Scheinkanten, da $\Delta g(\mathbf{x}) = 0$ nur notwendig für Kanten
- Kantenverschiebung wegen ausgedehnter Impulsantwort des LoG- bzw. DoG-Filters
→ Nachverarbeitung notwendig
(z. B. Verifikation von Kanten anhand des Gradientenbetrags)



LoG-Filterung ($\sigma = 0,8$); Steigung der Nulldurchgänge; Binarisierung.



LoG-Filterung ($\sigma = 2,2$); Steigung der Nulldurchgänge; Binarisierung.